Étude d'un Jeu de Course-Poursuite

Gaspard Reghem

Niveau de l'activité : Lycée
Durée de l'activité : 1h30 / 2h
Matériel : fiches plastifiées et jetons

1 Résumé de l'activité

Cette activité a pour but de faire travailler les élèves sur un jeu de course-poursuite dans un graphe. Un gendarme court après un voleur et on représente leur environnement par un graphe. Les règles du jeu sont simples : le gendarme puis le voleur choisissent un sommet de départ, ensuite ils se déplacent chacun leur tour sur le graphe grace aux arètes, finalement, le gendarme gagne s'il se situe sur le même sommet que le voleur. L'objectif est de déterminer s'il existe une stratégie gagnante pour le gendarme en fonction du graphe.

2 Déroulement de l'activité

2.1 Travail sur des exemples

Cette première partie pour but de familiariser les élèves avec les nouvelles notions tout en introduisant du vocabulaire spécifique aux graphes. L'idée est de leur montrer qu'il est possible de démontrer l'existence et la non-existence de stratégies gagnantes. Cette partie sera donc une alternance de courts moments théoriques où je présenterai de nouvelles notions, puis, de travail en groupe, et ensuite, d'une mise en commun des découvertes des différentes équipes.

2.2 Approche algorithmique

La seconde partie est plus théorique car elle consistera en un enchainement de petites preuves. L'objectif est d'initier les élèves aux preuves manipulant les graphes. Une fois les résultats théoriques établis, je ménerai les élèves vers l'élaboration d'un algorithme qui détermine si un graphe possède une stratégie gagnante pour le gendarme. Si les élèves n'ont pas les compétences en algorithmique, je me contenterai de leur montrer la correction des algorithmes.

3 Lien avec l'informatique

Cette activité aborde l'informatique de deux façons. Tout d'abord, la structure de graphe est essentielle en informatique. Elle possède de multiples applications dans des domaines variées. Si des élèves décident de se lancer dans des études d'informtique, ils rencontreront nécessairement des graphes. Ensuite, l'algorithmique est un aspect essentiel de l'informatique car elle permet d'automatiser la gestion de l'information. De plus, l'algorithmique est plus simple à appréhender pour les élèves car les mathématiques l'utilisent parfois (algorithme d'Euclide, test de primalité).

4 Pré-requis

Il n'y a pas vraiment de pré-requis pour cette activité si ce n'est des bases en algorithmique. Puisque la théorie des graphes n'est pas enseignée au lycée, je m'attend à repartir de zéro et je pourrai adapter la difficulté de la deuxième partie en fonction des élèves sans problème.

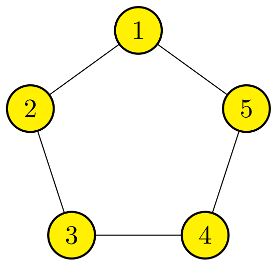
Détails de l'Activité

Gaspard Reghem

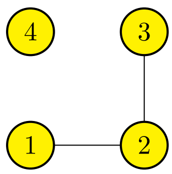
1 Principe de l'activité

On souhaite représenter une course-poursuite entre un voleur et un gendarme afin de déterminer si l'environnement permet au gendarme de capturer le voleur à coup sûr. Dans ce but, on modélisera l'environnement par un graphe G. Un graphe est un couple (V, E) où V est un ensemble fini de sommets et E est un ensemble de paires de sommets appartenant à V(i.e. l'ensemble des arètes).

ex: $G = (V = \{1; 2; 3; 4; 5\}\, ; E = \{\{1; 2\}\, ; \{2; 3\}\, ; \{3; 4\}\, ; \{4; 5\}\, ; \{5; 1\}\})$



$G = (V = \{1; 2; 3\}\, ; E = \{\{1; 2\}\, ; \{2; 3\}\})$



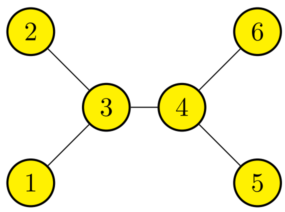
Chaque sommet représente un lieu où le voleur et le gendarme peuvent être et les arètes représentent la possibilité de passer en un coup entre les sommets qu'elles relient. Ainsi, sur le premier exemple, on peut passer du point 1 au point 2 en un coup mais pas du point 1 au point 3 (mais on peut le faire en deux coups).

On supposera que tous les sommets sont accessibles en un nombre fini de coups depuis tous les sommets, on dit que les graphes que l'ont considèrent sont connexes. Le première exemple est un graphe connexe mais pas le deuxième donc on ne l'étudiera pas.

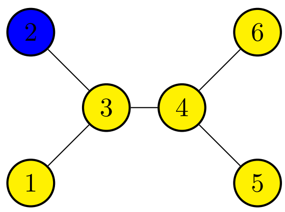
Maintenant que l'on a notre environnement, passons aux règles du jeu :

1. Le gendarme choisit son sommet de départ.
2. Le voleur choisit ensuite son sommet de départ.
3. chacun se déplace à son tour en commençant par le gendarme.
4. Lorsque c'est votre tour, vous pouvez vous déplacer d'une arète ou rester sur place.
5. Le gendarme gagne s'il se trouve sur le même sommet que le voleur

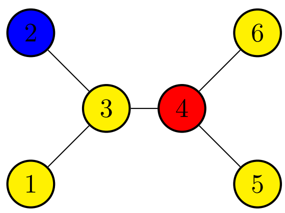
Voici une partie exemple:



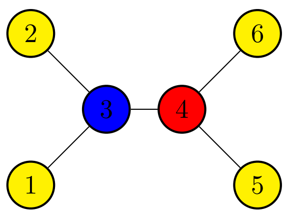
Voici l'environnement



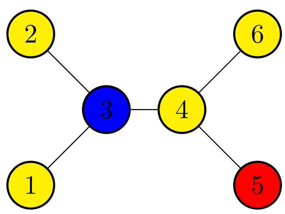
Le gendarme se place en 2



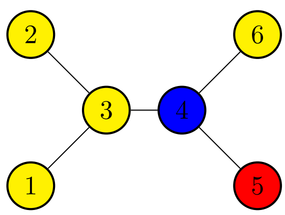
Le voleur se place en 4



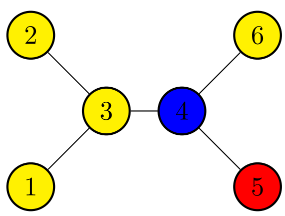
Le gendarme se déplace en 3



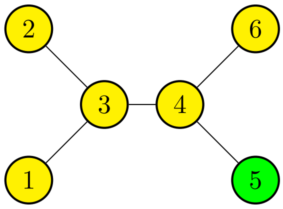
Le voleur se déplace en 5



Le gendarme se déplace en 4



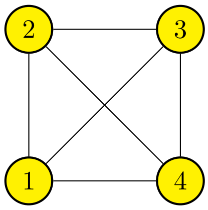
Le voleur reste sur place



Le gendarme se déplace en 5 et gagne

Maintenant, on voudrait savoir s'il existe une stratégie gagnante pour le gendarme. On dit qu'un graphe est gendarme-gagnant s'il existe une position de départ telle que pour toute décision du voleur il existe une stratégie gagnante pour le gendarme. Dans l'autre cas, on dit que le graphe est voleur-gagnant.

Typiquement, un graphe où tous les sommets sont reliés entre eux est gendarme-gagnant.



Voici l'environnement

En effet, si le gendarme se place sur le sommet 1, peu importe où le voleur se place, il sera attrapé au premier tour du gendarme.

2 Déroulement de l'activité

2.1 Travail sur des exemples

Pour faciliter la compréhension et l'assimilation des règles, les élèves vont commencer par travailler sur des exemples qui possèdent des caractéristiques particulières. Ces propriétés seront à l'origine de stratégies soit gendarme-gagnante soit voleur-gagnante et la difficulté sera croissante. Dans un premier temps, les élèves travailleront en groupe, puis on mutualisera les résultats afin d'obtenir une stratégie gagnante. Afin d'éviter qu'ils ne se focalisent trop sur leur cas particulier, je ferai attention à donner un maximum de graphes différents aux groupes (même s'ils auront tous une caractéristique commune). Avant de distribuer les exemples, je donnerai aux élèves la caractéristiques des graphes pour les guider dans la recherche d'une stratégie.

J'ai prévu 5 cas d'étude : graphe avec sommet universel, cycle, arbre, graphe biparti de degré supérieur à deux, et graphe n-régulier non-complet pour $n \geq 4$. A chaque fois, il sera nécessaire d'introduire du vocabulaire relatif aux graphes et cela sera fait aussi rigoureusement que possible. L'idée est aussi que les élèves essayent de retouver ces propriétés sur l'exemple qui leur est donné. Si jamais le temps presse, il n'est pas nécessaire de traiter les derniers cas car ils sont plus techniques. En effet, l'objectif de cette partie est plus la découverte du vocabulaire associé aux graphes et la manipulation du jeu et des notions que les résulats en eux-mêmes.

2.2 Approche algorithmique

Maintenant que les élèves maitraisent le jeu et ses notions, on va entrer dans une phase plus théorique. Le but est de développer un algorithme capable de déterminer si un graphe est gendarme-gagnant ou voleur-gagnant. Tout d'abord, on étudiera la notion de voisinage d'un sommet dans un graphe et celle de sommet dominé. Ensuite, les élèves devront réussir à prouver que la présence d'un sommet dominé est nécessaire pour qu'un graphe soit gendarme-gagnant. J'aimerai faire en sorte que la preuve soit construite à partir des idées des élèves et que mon intervention se limite à indiquer s'ils se dirigent dans la bonne direction. Bien sur, je prévois d'apporter des indices pour les aider à avancer. Ensuite, on admettra la propriété suivante:

Soit G un graphe, si G possède un sommet dominé S, alors on pose G' le graphe qui est obtenu en otant à G S et toutes ses arètes. On a que G est gendarme-gagnant ssi G' aussi.

Je ne vais pas démontrer cette propriété car cela serait trop chronophage mais je la mettrais surement dans le poly. A partir de ces deux propriétés, j'aimerais arriver à créer avec les élèves un algorithme pour déterminer si un graphe est gendarme-gagnant. On commencera par évaluer rapidement le niveau de la classe en algorithmique par des sondages à main levée. Si nécessaire, j'expliquerais comment on construit un algorithme à base de boucles for, de boucles $tantque$, de blocks if et de juxtapositions. On commencera par essayer d'obtenir un algorithme qui teste si un graphe possède un sommet dominé. Puis, on passera à l'algorithme voulu. Si jamais cela se révèle trop difficile pour les élèves, je donnerai les algorithmes et on se concentrera sur le fait de prouver que ces algorithmes fonctionnent. Dans le cas où les élèves n'auraient pas de difficulté, la preuve de correction se fera en même temps que la création de l'algorithme. On ne parlera pas de complexité car cela ferait trop de nouvelles notions.

3 Matériel

Les élèves n'ont besoin de rien apporter, je distriburai un poly en fin de cours et je projèterai un diapo pendant la séance pour que les notions importantes soient au tableau pendant les temps de recherche.

J'apporterai les graphes imprimés et plastifiés ainis que des jetons pour que les élèves puissent jouer.